

## Трехзначная диалектическая логика

*Брусенцов Н. П.*

Диалектика – это наука о наиболее общих законах развития природы, общества и мышления, характеризующаяся вкратце как учение о единстве противоположностей [1, с. 79]. Диалектическая логика по сути должна быть методом этой науки, однако, суть ее все еще остается дискуссионной проблемой [1, с. 80]. Ее противопоставляют формальной (традиционной) и современной (математической) логике как неформальную, содержательную и вместе с тем как логику движения, развития в духе гераклитова "все течет, все изменяется". Поскольку формальность понимается также как отвлечение от действительности и априорность принципов, то диалектической должна быть логика, принципы которой реальны, а критерий истинности состоит в соответствии опыту, практике. Суть этой логики в том, что в ней адекватно отображены взаимосвязи вещей, и что по вещему замыслу Аристотеля "будучи способом исследования, она прокладывает путь началам всех учений" [2, "Топика", 101b3].

Практическая неадекватность формальной логики обусловлена искусственностью ее основополагающего принципа – закона исключенного третьего, в силу которого важнейшее из отношений несовместимости – контрарность – не является базисным. Поскольку "третьего не дано", то логика двухзначна, и операцией отрицания в ней естественно оказывается дополнение, а отношением несовместимости – комплементарность (контрадикторность).

В отличие от контрарности, предполагающей наличие между членами отношения противоположности третьего-среднего, промежуточного, комплементарность дихотомична – третье-промежуточное, представляющее собой переход из одной крайности в другую, в ней исключено. Но как раз в этом переходе предмет диалектической логики – изменчивость, развитие, становление. И надо заметить, что недиалектичность обусловлена не комплементарностью отрицания, а именно игнорированием переходного третьего. Комплементарность не противопоставлена ни диалектике, ни трехзначности: в трехзначной логике "не-первое" есть "второе либо третье", а "третье" есть "не-первое и не-второе". Формалисты полагают, что "не-первое и не-второе" ("не-да и не-нет") невозможно, не существует, поэтому ни аристотелева силлогистика, ни модальная, ни тем более диалектическая логика адекватного отображения у них не находят и оттого подозреваются в некорректности.

Очевидным свидетельством неестественности двухзначной логики служит общество "рыцарей" и "лжецов" [3], устроенное и функционирующее по ее законам. Все его члены либо "рыцари", либо "лжецы", "Рыцарь" никогда не лжет, "лжец" лжет всегда, не может не лгать. "Рыцарь" есть "не-лжец", "лжец" есть "не-рыцарь". Таков дискретный мир двухзначности – крайне грубая карикатура реального мира.

В реальности нет ни идеальных рыцарей, ни абсолютных лжецов, причем если рыцарями признают избегающих лжи, то лжецом называют и единожды солгавшего. Но в подавляющем большинстве люди – не рыцари и не лжецы, а нечто третье – промежуточное, то лгут, то не лгут, в зависимости от обстоятельств, и как показал Сократ, ложь тоже бывает добродетелью. Реальность не так проста, как полагают формалисты-двухзначники, напрочь устранившие ее диалектическое содержание своим априорным "законом исключенного третьего".

Конечно, логика в результате стала простой, но осваивают люди ее (вернее – выучивают) с большим трудом, потому что она не соответствует здравому смыслу, выхолащивает сущность взаимосвязей, обнаруживаемых в действительности. Это не тот Органон, в котором Аристотель усматривал начала и общий метод всех наук, универсальный инструмент познания. Не удивительно, что науки развиваются сами по себе, независимо от формалистского "Органона", а настойчивое стремление положить его в основание математики привело к кризису [4,5]. В практических делах формальную логику не применяют, полагаясь на интуицию и здравомыслие. Исключение составляют, пожалуй, двоичные компьютеры – материализация логики "рыцарей" и "лжецов". Но даже в условиях триумфа цифровых технологий безуспешность "интеллектуализации обработки информации" настораживает.

Закон исключенного третьего незаслуженно приписывают Аристотелю, и таким образом авторитетнейший

философ оказывается отцом двухзначной логики. На самом деле принцип двухзначности изобрели, вопреки аристотелизму, стоики (в частности, Хрисипп). Аристотель же неотступно настаивает на существенности третьего (среднего, промежуточного, привходящего), квалифицируемого им как предмет диалектики [2, "Метафизика", 996b27]. В силлогистике наряду с дихотомией (контрадикторностью) имеет место трихотомия (контрарность), и "не быть" не равнозначно "быть не-", чего формалистам, от стоиков до ультрамодерных, постигнуть, видимо, не дано.

У Аристотеля третье исключено только в "началах доказательства" применительно к первичным терминам, присущность/антиприсущность которых индивидуальным объектам должна быть однозначной, иначе ничего определенного доказать нельзя [2, "Вторая аналитика", 74b5]. Действительно, в силлогистике заключение о необходимой присущности термина  $x$  термину  $z$  возможно только из посылок, выражающих также необходимые взаимосвязи терминов  $x$  с  $y$  и  $y$  с  $z$ , т. е. только из общеутвердительных либо общеотрицательных суждений, в которых термины дискретны и двухзначны, как в булевой алгебре. Однако отношение присущности у Аристотеля трехзначно: общеутвердительное суждение, выражающее присущность, контрарно общеотрицательному (суждению антиприсущности), совместное же отрицание обоих (не-присущность и не-антиприсущность) составляет третье, промежуточное-привходящее.

В традиционной трактовке силлогистики истолковывать общие суждения как выражающие присущность (она же необходимое следование) не принято. Поэтому третье-среднее остается невыявленным, треугольник присущность/антиприсущность/не-антиприсущность подменен "логическим квадратом Псела", и нет возможности преодолеть парадоксы материальной (равно как и "строгой", "сильной" и пр.) импликации, чтобы прийти к безупречному определению необходимого следования, уже сформулированному Аристотелем [2, "Первая аналитика", 57b1] две с лишним тысячи лет тому назад.

Впрочем, "квадрат Псела" вполне корректен и естественно обобщается, если не ограничиваться пределами "позитивной" силлогистики, в "логический куб" с четырьмя частными суждениями. Затруднение составляет несовместимость утверждаемых в нем законов подчинения частных суждений общим с законом исключенного третьего [6]. Однако именно последний принципиально несовместим с силлогистикой в силу ее диалектической сущности.

Аристотель употребил в силлогистике термины-буквы в качестве символов абстрактных особенностей, попарно различных и соединимых в различные по составу совокупности (в булевой алгебре элементарные конъюнкции) – всевозможные виды составных понятий 1-й ступени. Конкретные понятия порождаются приданием терминам тех или иных смысловых значений, подобно тому как в числовой алгебре входящие в выражение буквы-переменные заменяются числовыми значениями либо выражениями, принимающими числовые значения. Двухзначность терминов, т.е. подчиненность закону исключенного третьего, понимается в духе аристотелевых "начал доказательства" как четкая попарная различимость: сопоставляемый с термином  $x$  произвольно взятый термин есть либо  $x$ , либо не- $x$ , что равнозначно анти- $x$ , ибо третье исключено. Практически исключенность выражается в недопустимости такого начертания термина-буквы, при котором однозначное опознание ее не гарантировано. Короче, исключение третьего обеспечивает дискретность идентификации терминов.

Далее проблема возникает в связи со значением, а лучше сказать, со статусом, термина в составе совокупности (элементарной конъюнкции), определяющей сущность рассматриваемого (данного) понятия. По Аристотелю, термин может быть либо необходимо присущим понятию (принадлежащим совокупности), либо антиприсущим (антипринадлежащим), либо привходящим (не принадлежащим с необходимостью и не антипринадлежащим). В булевой алгебре совокупность-конъюнкция содержит присущие термины неинвертированными, антиприсущие – с символом инверсии-отрицания, а привходящие не содержит (умалчивает). Например, сущность понятия, охарактеризованного в терминах  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u$  так, что  $x$  и  $u$  присущи,  $y$  антиприсуще,  $z$  привходяще, выражается конъюнкцией  $xu'u$ , где  $u'$  символизирует диаметрально инверсию (контрарное отрицание) термина  $u$ , а привходящее  $z$  умалчивается.

Как видно, отношение присущности у Аристотеля трехзначно (трихотомично), и эта трихотомия вполне отображима посредством надлежащим образом интерпретируемой булевой алгебры. Сам Дж. Буль, выявивший

третье-привходящее в результате решения логических уравнений, называл его *неопределенностью*, а умалчиваемые термины – *элиминированными* [7,8]. Сущность привходящего, которое по Аристотелю не обусловлено однозначно, но может быть "либо так, либо не так – как попало", выявляет процедура, формирующая выражение  $x'u$  "склеиванием" двух противоположных относительно  $z$  индивидуальных конъюнкций:

$$xy'zu \vee xy'z'u == xy'u(z \vee z') == xy'u$$

Исходная дизъюнкция индивидуальных конъюнкций – совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) выражения  $x'u$  – свидетельствует о том, что это выражение нечетко, огрубленно определяет рассматриваемое понятие в заданном наборе терминов, идентифицируя не индивид, а *класс*, включающий два индивида. Тожественное преобразование СДНФ в минимальные формы осуществимо благодаря тому, что в последних термины обретают трехзначность. В приведенном примере атрибут  $x'u$ , присущий каждому индивиду, выражает сущность класса в целом, тогда как умалчиваемый атрибут  $z$  является привходящим.

СДНФ произвольного  $n$ -терминного выражения включает до  $2^n$  индивидуальных конъюнкций, в частности, не склеиваемые ни по одному термину, либо попарно склеиваемые по нескольким терминам, так что все они оказываются привходящими по отношению к той или иной неиндивидуальной конъюнкции в минимальной форме. Присущность термина СДНФ-выражению в целом характеризуется в общем случае отношением числа членов СДНФ, содержащих этот термин неинвертированным, к числу всех ее членов. Например, для выражения материальной импликации  $x \rightarrow y == xy \vee x'u \vee x'y'$  присущность термина  $x$  равна  $1/3$ , присущность термина  $y$  равна  $2/3$ . Минимальная форма этого выражения –  $x' \vee y$  – преобразуется в СДНФ восстановлением умалчиваемых в ней терминов:

$$x' \vee y == x'(y \vee y') \vee (x \vee x')y == x'y \vee x'y' \vee xy \vee x'y == xy \vee x'y \vee x'y'$$

Диалектика, или логика познания, определяемая Аристотелем как учение о привходящем, не ограничивается выявлением сущности последнего и восстановлением умалчиваемых в булевой алгебре привходящих терминов. Главная ее задача – устранение неопределенности, установление условий, при которых привходящий термин обретает статус непривходящего.

В случае материальной импликации эта задача сводится к решению уравнения  $x' \vee y = 1$  относительно соответствующего термина. Так, для термина  $y$  получим:  $y = x \vee x'u$ , т. е. если дано  $x$ , то необходимо дано  $y$ , а если  $x$  исключено, то  $y$  привходяще. Аналогично для  $x$ : если  $y$  исключено, то и  $x$  необходимо-исключено, иначе  $x$  привходяще. И никаких парадоксов.

В случае с привходящим  $z$  в предыдущем примере решение уравнения  $x'u = 1$  относительно  $z$  невозможно, поскольку термина  $z$  это уравнение не содержит, он элиминирован как не связанный с прочими терминами. Требуется эмпирически уточнить или конкретизировать взаимосвязи, возможно, с привлечением новых терминов. Так, может оказаться, что наряду с двумя учтенными в примере альтернативами – индивидуальными членами дизъюнкции – имеются другие либо обнаружится хотя бы один еще не совпадающий с рассматриваемыми термин, что неизбежно увеличит число альтернатив.

Надо сказать, что невозможность исследовать данный пример путем решения булева уравнения не случайна. С диалектической точки зрения этот пример некорректен. Один лишь термин  $z$  представлен в нем противоположностью своих статусов, позволяющей заключить, что же есть  $z$  в отличие от прочих терминов.

Ведь только из сопоставления того, чему термин присущ, с тем, чему он антиприсущ, извлекается представление о том, что им обозначено и чем он отличается (если отличается) от других терминов. Это именно тот принцип диалектики, который Гегель неудачно определил как тождество, или единство, противоположностей. При общепринятом понимании "тождества" в смысле "одно и то же", а "единства" в смысле совместности-конъюнкции тождество, как и единство, противоположностей, немыслимо, невозможно. Это фундаментальный принцип логики – установленный Аристотелем закон недопустимости противоречия: противоречащее одно другому не может

сказываться вместе" ["Метафизика", 1007b18].

В диалектике нет необходимости отвергать этот общепризнанный принцип, неприятие которого исключает возможность рассуждать. Реанимация логики достижима при не столь катастрофическом и вполне отвечающем реальности постулате *сосуществования противоположностей*.

Противоположности – это члены отношения необходимой несовместимости (контрарности), которое также называют противоположностью. Противоположны присущность и антиприсущность, наличие и отсутствие, утверждение и отрицание, бытие и небытие. Безусловная несовместимость противоположностей алгебраически выражается тождеством:  $x \wedge x' == 0$  – конъюнкция (т. е. единство) утверждения и отрицания одного и того же (термина  $x$ ) тождественна невозможности, есть "ничто". Это аристотелево требование непротиворечивости. Оно исключает существование вещи, которой были бы присущи совместно противоположные определенности, или иначе говоря, присуще и антиприсуще одно и то же.

Но это требование не препятствует тому, чтобы противоположности одновременно были присущи разным вещам. Более того, вещи тем и различаются, что каждой из них присуще нечто противоположное присущему другим. Таким образом, противоположности необходимо *сосуществуют* в различных вещах и соответственно в понятиях об этих вещах. Рассмотренная выше пара индивидуальных конъюнкций, различавшихся статусом термина  $z$ , является примером такого сосуществования.

В общем виде принцип сосуществования противоположностей выразим тождеством  $\mathbf{V}x\mathbf{V}x' == 1$ , в котором символ "интегральной дизъюнкции"  $\mathbf{V}$  означает дизъюнкцию значений, принимаемых термином  $x$  и его инверсией  $x'$ , распространенную на все члены рассматриваемого выражения. Требуется, чтобы данному тождеству удовлетворял любой из входящих в выражение терминов, т. е. все без исключения термины должны быть привходящими. Это и есть постулат диалектической логики: ничто не остается неизменным – "все течет", "покой нам только снится".

Замечательно, что сформулированный постулат находится в основании аристотелевой силлогистики. Бесчисленные попытки алгебраизации этой древнейшей логической системы, кстати, единственной не конфликтующей со здравым смыслом и не порождающей парадоксов, неизменно оказывались безуспешными, вследствие чего сложилось мнение, будто бы у Аристотеля нелады с понятием пустого множества [9,10]. Необходимым и достаточным условием положительного решения этой проблемы является аксиома сосуществования противоположностей [11].

В  $n$ -терминном Универсуме Аристотеля (УА) аподиктически выполняется тождество

$$\mathbf{V}x_1\mathbf{V}x'_1\mathbf{V}x_2\mathbf{V}x'_2 \dots \mathbf{V}x_n\mathbf{V}x'_n == 1$$

Это значит, что у каждого выражения в УА подразумевается, может быть, по умолчанию, конъюнктивно связанная с ним левая часть данного тождества. Например, выражение "строгой импликации" Льюиса [12]  $\mathbf{V}'x\mathbf{u}$  становится в УА общеутвердительным суждением силлогистики:

$$A_{xy} == \mathbf{V}'x\mathbf{u}\mathbf{V}x\mathbf{V}x'\mathbf{V}y\mathbf{V}y' == \mathbf{V}'x\mathbf{u}\mathbf{V}x\mathbf{V}y' == \mathbf{V}x\mathbf{V}\mathbf{V}'x\mathbf{u}\mathbf{V}y'$$

– необходимо существуют объекты, идентифицируемые как  $x\mathbf{u}$  и объекты, идентифицируемые как  $x'\mathbf{u}$ , исключено существование объектов класса  $x\mathbf{u}'$ . В таком понимании это суждение избавлено от парадоксов и строго соответствует аристотелеву определению необходимого следования, равнозначного присущности сказуемого  $y$  подлежащему  $x$ .

Конъюнкция  $\mathbf{V}x\mathbf{u}\mathbf{V}'x\mathbf{u}'\mathbf{V}x'\mathbf{u}$  существований/антисуществований индивидуальных в наборе терминов  $x, y$  объектов определяет нечеткое по Л. Заде [13] множество объектов этого рода, декларируя принадлежность ему  $x\mathbf{u}$  и  $x'\mathbf{u}'$ , антипринадлежность  $x\mathbf{u}'$  и умалчивая  $x'\mathbf{u}$ , придав тем самым ему статус привходящего, не присущего и не антиприсущего и потому вольного при устранении нечеткости стать либо присущим, либо антиприсущим. В

последнем случае четкое множество  $VxyV'xyV'x'yVx'y'$  определяет отношение тождественности:  $x == y$ .

Представленные определения сводят силлогистику к теории нечетких множеств в УА. В сущности это трехзначная логика 2-й ступени – логика дизъюнктов (интегральных дизъюнкций), изоморфная трехзначной логике терминов 1-й ступени, однако в условиях сосуществования противоположностей, т. е. в УА. Например, общеотрицательное суждение  $Exy$  получается из общеутвердительно инвертированием термина-сказуемого  $y$ :

$$Exy = \text{inv.}y(Axy) = \text{inv.}y(VxyV'xyV'x'y) = VxyV'xyVx'y = V'xyVxVy$$

Другое общеотрицательное суждение – несовместимость антиподов  $Ex'y'$ , упущенная традиционной силлогистикой, получается инвертированием в  $Axy$  термина  $x$ :

$$Ex'y' = \text{inv.}x(Axy) = VxyV'x'yV'x'y' = Vx'VyV'x'y'$$

Частноутвердительные суждения  $Ixy$  и  $Ix'y'$  (суть отрицания-дополнения в УА соответствующих общеотрицательных:

$$Ixy = |_{yA} Exy = |_{yA} (V'xyVxVyV'x'y) = VxyVx'Vy'$$

$$Ix'y' = |_{yA} Ex'y' = Vx'y'VxVy$$

Законы подчинения частных суждений общим, обращения и контрапозиции, упускаемой практически во всех формализациях силлогистики, с полной очевидностью обнаруживаются при сопоставлении выражений, представляющих связанные этими законами суждения. Все правильные модусы силлогизма, в том числе традиционно принимаемые в качестве аксиом модусы 1-й фигуры, теперь доказуемы в УА посредством дизъюнктов воспроизведением с некоторой корректировкой не востребуемых на протяжении уже более ста лет результатов, достигнутых Льюисом Кэрролом при помощи его замечательной диаграммы [13, 14].

Ослабленной версией сосуществования противоположностей является неисключенность сосуществования их:

$$(Vx_1 \vee Vx'_1)(Vx_2 \vee Vx'_2) \dots (x_n \vee Vx'_n) == 1$$

Это тождество определяет  $n$ -терминный Универсум интуиционистов (УИ), выражая принцип квазидиалектической интуиционистской, или модальной, логики. Первичные термины  $x, y, z, \dots$  в ней не необходимо привходящи, т.е. могут принимать статус как привходящего, так и общезначимого, что выразимо при помощи "модальных функторов"  $L, M, Q$ , именующих двухзначные функции трехзначной переменной:  $Lx, Mx, Qx$ , определенные в УИ так:

$$Vx \vee Vx' == VxV'x' \vee V'xVx' \vee VxVx' == Lx \vee Lx' \vee L'xL'x' == M'x' \vee M'x \vee MxMx' == Lx \vee Lx' \vee Qx == 1$$

Короче, в УИ:  $Mx == Vx, Lx == V'x', Qx == VxVx'$ . Очевидно, что  $Lx, Lx', Qx$  несовместимы и попарно несовместимы, т. е. представляют собой двухзначные компоненты трехзначной характеристики  $x$ , причем  $Mx == Lx \vee Qx$ .

Интуиционисты не исключают привходящего в качестве третьего статуса, но сосуществование противоположностей у них не необходимо.

В классической двухзначной логике сосуществование противоположностей вовсе исключено. Ее универсум – Универсум Буля (УБ) – порождается исключением в УИ третьего:  $VxVx' == 0$ , что равносильно необходимости

условия  $V'x \vee Vx' == 1$ , с принятием которого однотерминное определение УБ сводится к тождеству

$$(Vx \vee Vx')(V'x \vee V'x') == VxV'x' \vee V'xVx' == Lx \vee Lx' == Mx \vee Mx' == x \vee x' == 1.$$

А это и есть закон исключенного третьего.

### Литература

1. **Кондаков Н. И.** Введение в логику. – М.: "Наука", 1967.
2. **Аристотель.** Сочинения в четырех томах. – М.: "Мысль", т.1 – 1975, т.2 – 1978.
3. **Смолиан Р. М.** Как же называется эта книга? – "Мир", 1981.
4. **Арнольд В. И.** Антинаучная революция и математика. // Вестник РАН, том 69, № 6, 1999, с. 533-558.
5. Традиционная логика и канторовская диагональная процедура / Е. В. Болдин, С. Н. Бычков, Д. И. Виннер, Л. О. Шашкин. – М.: "Янус-К", 1997.
6. **Смирнов В. А.** Силлогистика без закона исключенного третьего и ее погружение в исчисление предикатов // Исследование логических систем. – М.: "Наука", 1970, с. 68-77.
7. **Boole G.** An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. – London, 1854.
8. **Порецкий П. С.** О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики. – Казань, 1884.
9. **Бурбаки Н.** Теория множеств. – М.: "Мир", 1965.
10. **Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.** Введение в математическую логику. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
11. **Брусенцов Н. П.** Искусство достоверного рассуждения. Неформальная реконструкция аристотелевой силлогистики и булевой математики мысли. – М.: Фонд "Новое тысячелетие", 1998.
12. **Слинин Я. А.** Современная модальная логика. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976.
13. **Кофман А.** Введение в теорию нечетких множеств. Предисловие Л. А. Заде. – М.: "Радио и связь", 1982.
14. **Кэррол Льюис.** Символическая логика // Льюис Кэррол. История с узелками. – М.: "Мир", 1973.
15. **Брусенцов Н. П.** Диаграммы Льюиса Кэррола и аристотелева силлогистика // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. Вып.13. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977, с. 164-182

Доложено на Ломоносовских чтениях 2001 г. на факультете ВМиК МГУ.

Опубликовано в Программные системы и инструменты: Тематический сборник № 2 // Под ред. Л. Н. Королева. - М. Издательский отдел ВМиК МГУ, 2001, с. 36-44.